BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Differensial Biasa

Berikut diberikan definisi dari Persamaan Differensial Biasa (PDB):

Definisi 2.1.1 (wasilatul & davi, 2018) *Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak di ketahui hanya bergantung pada satu peubah bebas/hanya melibatkan satu variabel bebas.*

PDB digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena kehidupan nyata yang berubah seiring waktu, seperti pertumbuhan populasi, penyebaran penyakit, dan bahkan perubahan keadaan emosional seseorang. PDB dibagi menjadi orde pertama, orde kedua, dst. berdasarkan tingkat turunan tertingginya. PDB orde pertama memiliki bentuk umum sebagai berikut (Boyce & DiPrima, 2017):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad (2.1.1)$$

dimana

a. y adalah variabel tak bebas,
b. t adalah variabel bebas terhadap waktu,
c. $f(t,y)$ adalah fungsi 2 variabel

PDB memainkan peran penting dalam pengembangan model matematika, terutama ketika fenomena yang dipelajari bersifat dinamis. Dalam penelitian ini, PDB digunakan untuk membangun model matematika tentang dinamika depresi mahasiswa.

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Berikut diberika definisi Sistem Persamaan Differensial:

Definisi 2.2.1 (Fitria A, 2009) *Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, Dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten*

Secara umum, bentuk sistem persamaan diferensial biasa orde pertama dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$$

$$\vdots \tag{2.2.1}$$

$$\frac{dy_3}{dt} = f_3(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$$

di mana $y_1, y_2, \dots y_n$ merupakan variabel bebas, dan t adalah variabel terikat. Sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derevatif fungsi x_n terhadap t , dan g_i adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Fitria A, 2009)

2.3. Model Matematika

Model matematika merupakan representasi simbolik dari suatu sistem atau fenomena nyata yang diformulasikan menggunakan struktur matematika seperti persamaan diferensial, aljabar, logika, atau fungsi. Tujuan utama dari model matematika adalah untuk memahami, menganalisis, menjelaskan, dan memprediksi perilaku sistem yang diteliti. Dalam proses pemodelan, berbagai komponen utama seperti variabel (besarnya yang berubah seiring waktu), parameter (nilai konstan yang mempengaruhi sistem), dan asumsi (penyederhanaan realitas) menjadi dasar untuk membangun hubungan matematika antara faktor-faktor yang terlibat.

Secara umum, pengembangan model matematika dimulai dari identifikasi masalah, formulasi asumsi, penyusunan persamaan, analisis solusi baik secara analitik maupun numerik, dan validasi terhadap data empiris. Proses ini menghasilkan alat yang kuat untuk menilai skenario masa depan dan mengambil keputusan yang lebih rasional dan berbasis bukti (Boyce & DiPrima, 2017).

2.4. Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan dibahas titik kesetimbangan dalam suatu titik:

2.4.1. Definisi Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan titik yang tidak akan berubah terhadap waktu artinya pada saat t = 1,2, …, n, nilai tersebut akan tetap sama (Widad, 2023).

Definisi 2.4.1(Boyce & DiPrima, 2017) *Diberikan suatu system persamaan diferensial orde satu* $x = f(x)$ *yang mempengaruhi Solusi dengan kondisi awal* $x(0) = x_0$. *Suat u vector* $\bar{x}$ *yang memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *disebut titik kesetimbangan.*

Menurut Strogatz (2015), titik kesetimbangan menggambarkan posisi di mana semua turunan dalam sistem bernilai nol dan sistem berhenti berkembang seiring waktu. Dengan demikian, analisis terhadap titik kesetimbangan menjadi dasar dalam memahami perilaku jangka panjang suatu sistem dinamis (Hirsch, Smale, & Devaney, 2013). Kestabilan suatu titik kesetimbangan dapat diperiksa dari akar karakteristik atau nilai eigen dengan menyelesaikan $|\lambda I - A| = 0$ dimana A merupakan matriks dari sistem persamaan diferensial yang linear dan berukuran $n \times n$ (Manis, 2023)

2.4.2. Kestabilan Titik kesetimbangan

Penyelesaian kestabilan titik kesetimbangan dapat di selesaikan secara analitik maupun numerik. Sistem dikatakan stabil jika perubahan kecil pada sistem hanya sedikit mengubah perilaku sistem untuk waktu yang akan datang, sedangkan sistem dikatakan tidak stabil jika perubahan kecil pada sistem mengakibatkan perubahan besar pada perilaku sistem untuk waktu yang akan datang (Widad, 2023). Sistem persamaan nonlinear adalah sistem persamaan yang terdiri dari satu atau lebih persamaan nonlinear. Sistem persamaan ini merupakan permasalahan dasar matematika yang banyak dijumpai di berbagai bidang ilmu alam seperti fisika, kimia, komputasi mesin, dan lainnya (Rosita & Purwananto, 2012).

Beberapa sifat stabilitas titik kesetimbangan berdasarkan tanda bagian real pada nilai eigen dibagi menajadi 3 yaitu (Manis, 2023):

1. Stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$, sedemikian sehingga jika $|x_0 - \bar{x}| < 0$, maka $|x(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. Stabil asimtotik, jika stabil dan terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $|x_0 - \bar{x}| < 0$, maka $\lim_{t\to\infty} |x(t, x_0) - \bar{x}| = 0$.
3. Tidak stabil jika (i) tidak terdefinisi

2.5. Nilai Eigen

Kriteria kestabilan pada titik kesetimbangan disajikan pada teorema dibawah ini:

Teorema 2.5 (Wiggins, 1990)

a. Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ mempunyai baian real positif, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang di peroleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakterisktiknya yaitu nilai eigen matriks, maka untuk menentukan apakah niali eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.6 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwtz

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. untuk n = 2, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_3 > 0, a_1 > 0, a_1a_2 > a_3$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenihi, maka titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal.

Di bawah ini akan diberikan bentuk khusus mengenai kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dengan 2 persamaan (Darlina et al., 2012).

pandang sistem linier:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

dengan a,b,c dan d konstan.

Misalkan nilai eigen dari Matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.5.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.5.2) diatas, diperoleh:

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

2.6. Matriks Jacobian

Matriks jacobian merupakan matriks dari order pertama turunan parsial dari vektor nilai fungsi. Misalkan $F: R\ n \to R\ m$ adalah fungsi dari ruang Euclidean n ke ruang Euclidean m. Fungsi seperti ini diberikan oleh komponen m maka $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$ turunan parsial dari seua fungsi (jika ada) dapat dibentuk dalam $m \to n$ matriks. Matriks jacobian J dapat ditulis sebagi berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriks ini juga dilambangkan dengan $JF = (x_1, \dots, x_n)$ dan $\partial(y_1, \dots, y_n)$ (Anton, 2004)

$$JF = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

2.7. Metode Numerik

Metode numerik adalah suatu cabang atau bidang ilmu matematika, khususnya ilmu matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika; proses matematika ini selanjutnya telah dirumuskan untuk menirukan keadaan sebenarnya. Sasaran akhir dari analisis numerik yang dilakukan dalam metoda numerik adalah diper-olehnya metoda yang terbaik untuk memperoleh jawaban yang berguna dari persoalan matematika dan untuk menarik informasi yang berguna dari berbagai jawaban yang dapat diperoleh yang tidak dinyatakan dalam bentuk jabar atau transenden, persamaan diferensial biasa atau parsial, persamaan integral, atau kumpulan dari persamaan tersebut (Harijono,2000).

Dalil 1 (Harijono,2000).

Bila f(x) sinambung untuk $a \leq x \leq b$*, dan bila f(a) dan f(b) mempunyai tanda yang berlawanan, maka* $f(\xi) = 0$ *untuk sedikitnya satu nilai* ξ*, dimana* $a \leq \xi \leq b$*.*

Dalil 2 (Harijono,2000).

Bila f(x) sunambung untuk $a \leq x \leq b,$ *dan bila* $\lambda_1 dan\ \lambda_2$ *adalah konstanta positif, maka* $\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) = (\lambda_1 + \lambda_2) f(\xi)$ *untuk sedikitnya satu nilai* ξ*,dimana* $a \leq \xi \leq b$*.*

Metode numerik ialah teknik dimana masalah matematika di formulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselasaikan oleh pengoperasian aritmetika (Steven & Raymon,1991). Analisis numerik sebagai bagian dari bahan pelajaran mutakhir mengenai pengelolahan informasi (*information processing*). Data yang diberikan adalah informasi masukan (*input information*), dan hasil yang diperlukan adalah informasi keluaran (*output information*), sedangkan metode perhitungan tersebut dikenal sebagai algoritma (*algoritm*) (Manis, 2023).

2.8. Model SIR

Model kompartemen dalam epidemiologi merupakan pendekatan matematika yang digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi. Model ini membagi populasi ke dalam beberapa kelompok (kompartemen) berdasarkan status atau tahap infeksi yang dialami individu. Salah satu model dasar yang paling dikenal adalah model SIR, yang terdiri dari tiga kompartemen yaitu, *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Kompartemen S menggambarkan individu yang rentan terhadap penyakit, I adalah individu yang sedang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, sedangkan R mencakup individu yang telah sembuh dan diasumsikan memiliki kekebalan. Interaksi antara ketiga kompartemen ini dirumuskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa, yang melibatkan parameter seperti laju penularan (β) dan laju penyembuhan (γ). Secara matematis, model SIR dinyatakan dengan sistem berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \qquad (2.6.1)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

di mana laju penularan penyakit $\beta > 0$ dan laju pemulihan $\gamma > 0$. Suku insidensi bi-linear β S I untuk jumlah individu terinfeksi baru per satuan waktu sesuai dengan percampuran homogen antara kelas yang terinfeksi dan rentan. Ukuran populasi total harus tetap konstan, dan hal ini mudah dipahami dari sistem SIR yang mana jumlah ruas kiri dari ketiga persamaan tersebut merupakan turunan dari ukuran populasi total dan jumlah ruas kanan adalah nol, menyatakan ukuran populasi total dengan N (Weiss Sir Ronald Ross, 2013)

Sebagai pengembangan dari model SIR, muncul berbagai model yang lebih kompleks untuk menggambarkan fenomena yang lebih spesifik, beberapa diantaranya adalah model SEIRS terhadap kecanduan game online, model SEI1I2R terhadap kecanduan belanja online, maupun pada penyebaran penyakit seperti: Tuberculosis, Covid-19, dst.

2.9. Metode Runge Kutta

Peninjauan metoda perhitungan yang praktis dimulai dengan suatu kelas motode yang luas, yang dikenal sebagai metode Runge Kutta. Untuk memberi gambaran mengenai metode ini, akan ditinjau salah satu metode yaitu metode *Euler* yang jarang di pakai namun mempunyai nilai historik, merupakan titik tolak pembahasan metode lainnya (Harijono, 2000).

Metode Runge Kutta mencapai ketelitian suatu pendekatan deret taylor tanpa memerlukan kalkulasi turunan yng lebih tinggi. Banyak perubahan terjadi, tetapi semuanya dapat ditampung dalam bentuk umum persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset(x_i, y_i, h)h$$

dimana $\emptyset(x_i,\ y_i,\ h)$ disebut suatu fungsi inkremen yang dapat diinterpretasikan sebagai sebuah slope rata – rata sepanjang interval. Fungsi inkremen dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut:

$$\emptyset = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \qquad (2.7.1)$$

dimana setiap α adalah konstanta dan setiap k besarnya adalah:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$

$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$ (2.7.2)

.

.

.

$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,\ 1} k_1 h + q_{n-1,\ 2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,\ n-1} k_{n-1} h)$

Perhatikan bahwa semua harga k berhubungan secara rekurensi. Artinya, k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2, yang muncul lagi dalam persamaan untuk k_3, dan seterusnya. Rekurensi ini membuat metode Runge Kutta efisien untuk kalkulasi oleh komputer.

Metode Runge Kutta yang paling popular adalah orde keempat, karena kombinasi akurasi tinggi stabilitas yang baik, dan komplesitas perhitungan yang masih efisien. Berikut ini seringkali disebut dengan motode Runge Kutta klasik adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + [\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)]\, h$$

dimana:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} h k_1)$

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} h k_2)$ (2.7.3)

$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} h k_2)$

Perhatikan bahwa untuk PDB yang merupakan fungsi dari x, metode Runge Kutta orde keempat klasik adalah ekuivalen pula terhadap aturan Simpson 1/3 (Harijono, 2000).

2.10. *Burnout*

Burnout ialah keadaan keletihan fisik, emosional, serta mental yang dirasakan akibat dari keadaan penuh tekanan dalam kurun waktu yang panjang. *Burnout* ialah keadaan psikologis dimana munculnya perasaan negatif secara terus-menerus diiringi dengan berkurangnya motivasi dalam konteks belajar yang kerap dirasakan oleh siswa. *Burnout* pada awal mulanya biasa digunakan dalam konteks pekerjaan layanan jasa Tetapi, seiring berjalannya waktu *Burnout* tidak hanya dialami pekerja profesi layanan saja, melainkan pekerja profesi yang lain dalam bidang organisasi ataupun industri, bahkan pelajar serta mahasiswa bisa mengalami *Burnout*. Sekolah ialah tempat pelajar bekerja serta mempunyai konteks seperti tempat kerja. Walaupun pelajar tidak berada dalam sesuatu pekerjaan, tetapi dilihat dari perspektif psikologisnya, kegiatan yang dilakukan pelajar dapat dikatakan sebagai sesuatu pekerjaan (Suha, Nauli, & Karim, 2022)

Burnout akademik adalah kondisi seseorang yang merasakan kelelahan secara fisik, mental, maupun emosional yang diikuti oleh perasaan untuk menghindari diri dri lingkungan, serta merasakan penilaian diri yang rendah sehingga menyebabkan kejenuhan dalam belajar, ketidakpedulian terhadap tugas akademik, kurangnya motivasi, timbul rasa malas, dan mengakibatkan turunnya prestasi dalam pembelajaran (Hasbillah & Rahmasari, 2022)

Mahasiswa yang mengalami akademik *Burnout* akan melewatkan kelas (ketidakhadiran), tidak mengerjakan tugas dengan baik, , rendahnya motivasi untuk mengerjakan tugas-tugas yang diberikan dan mendapat hasil ujian yang buruk hingga akhirnya berpotensi untuk dikeluarkan dari perguruan tinggi. Banyak factor yang mempengaruhi keberhasilan belajar mahasiswa. Salah satu factor yang mempengaruhi proses pembelajaran adalah banyaknya tuntutan tugas disetiap matakuliah. Hal ini yang dapat menimbulkan rasa malas, menurunnya motivasi, menurunnya prestasi belajar serta menurunkan hubungan social dengan teman sebaya. Masalah yang tampak seperti itu sering disebut dengan kelelahan akademik atau academic *Burnout* (Permatasari, Latifah, & Pambudi, 2021)

Meningkatnya kasus *Burnout* pada mahasiswa saat ini menunjukkan perlunya perhatian lebih dalam dunia pendidikan tinggi, khususnya dalam merancang strategi intervensi yang tidak hanya menargetkan penyembuhan, tetapi juga pencegahan melalui pendekatan sistemik dan komprehensif. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan adalah pemodelan matematika, seperti model SELWR, yang mampu merepresentasikan dinamika transisi psikologis mahasiswa dari kondisi rentan hingga pulih.