BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks merupakan sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung. Tanda kurungnya ini bisa berupa kurung biasa “( )” menyatakan matriks secara formal sedangkan untuk kurung siku “[ ]”yang menyatakan matriks penunjukan elemen (Lulut Alfaris et al., 2022). Dijelaskan sebelumnya matriks terdiri dari unsur-unsur yang tersusun secara baris dan kolom. Jika banyak baris suatu matriks adalah m, dan banyak kolom suatu matriks adalah n, maka matriks tersebut memiliki ordo matriks (ordo adalah banyaknya baris kolom dalam matriks) atau ukuran $m \cdot n$. Perlu diingat bahwa m dan n hanya sebuah notasi, sehingga tidak boleh dilakukan sebuah perhitungan (penjumlahan, perkalian).

Matriks dinotasikan biasanya menggunakan huruf kapital seperti A, B, C dan untuk menyatakan kuantitas numerik menggunakan huruf kecil, sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ atau } Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Jika A adalah sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan entri atau elemen yang terdapat didalam baris i dan kolom j dari A. Jadi, matriks dengan ukuran $m \times n$ beserta entri-entrinya secara umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}.$$

Pada dasarnya operasi pada matriks sama dengan operasi Matematika biasa. Beberapa operasi matriks yang umum digunakan antara lain :

2.1.1 Penjumlahan Matriks

Menurut (Lulut Alfaris et al., 2022) dua buah matriks dapat dijumlahkan apabila berukuran sama. Sehingga penjumlahan matriks dapat dioperasikan hanya pada matriks-matriks yang memiliki orde sama. Setiap elemen pada baris ke- m dan kolom ke- n dijumlahkan dengan matriks lain pada baris ke- m dan kolom ke- n pula.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+8 \\ 4+3 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Pengurangan Matriks

Sama halnya dengan penjumlahan matriks, pengurangan matriks juga hanya dapat dioperasikan pada matriks-matriks apabila berordo sama. Cara pengurangan matriks juga sama dengan penjumlahan matriks yaitu setiap elemen pada baris ke- m dan kolom ke- n dikurangkan dengan matriks lain pada baris ke- m dan kolom ke- n pula.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-0 & 1-8 \\ 4-3 & 7-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.1.3 Perkalian Matriks

Ada dua jenis perkalian pada matriks, yaitu :

1) Perkalian Matriks dengan Skalar

Bila terdapat suatu skalar k dan matriks $A_{m \times n}$ dengan elemen a_{ij} maka kA adalah matriks yang berukuran $m \times n$ dengan elemen ka_{ij}. Berdasarkan definisi diatas, perkalian kA adalah sebuah matriks baru yang setiap elemennya merupakan perkalian antara suatu bilangan k dengan setiap elemen di A. Dan perkalian matriks dengan skalar ini bersifat komutatif, yaitu $kA = Ak$.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 & 7 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}.$$

2) Perkalian Matriks dengan Matriks

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut : untuk mencari entri dalam baris i dan kolom pada j dari AB pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j pada matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan (Anton et al., 1995).

Perkalian matriks dengan matriks hanya dapat dioperasikan jika banyaknya kolom dari matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua, jika syarat tersebut tidak dapat dipenuhi, maka hasil kali tidak dapat didefinisikan. Perkalian matriks dengan matriks ini tidak bersifat komutatif atau $AB \neq BA$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (2 \cdot 1) + (1 \cdot 3) & (2 \cdot 2) + (1 \cdot 4) & (2 \cdot 1) + (1 \cdot 7) \\ (3 \cdot 1) + (1 \cdot 3) & (3 \cdot 2) + (1 \cdot 4) & (3 \cdot 1) + (1 \cdot 7) \\ (4 \cdot 1) + (7 \cdot 3) & (4 \cdot 2) + (7 \cdot 4) & (4 \cdot 1) + (7 \cdot 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 6 & 10 & 10 \\ 25 & 36 & 53 \end{bmatrix}.$$

2.2 *Analytic Hierarchy Process* (AHP)

Menurut (Darmanto et al., 2014) *Analytic Hierarchy Process* (AHP) adalah suatu teori umum tentang pengukuran yang digunakan untuk menemukan skala rasio, baik dari perbandingan berpasangan yang diskrit maupun *kontinyu*. AHP menguraikan masalah multi faktor atau multi kriteria yang kompleks menjadi suatu hirarki.

Hirarki didefinisikan sebagai suatu representasi dari sebuah permasalahan yang kompleks dalam suatu struktur multi level dimana level pertama adalah tujuan, yang diikuti level faktor, kriteria, sub- kriteria, dan seterusnya ke bawah hingga level terakhir dari alternatif. Dengan hirarki, suatu masalah yang kompleks dapat diuraikan ke dalam kelompok-kelompoknya yang kemudian diatur menjadi suatu bentuk hirarki sehingga permasalahan akan tampak lebih terstruktur dan sistematis.

2.2.1 Matriks Perbandingan Berpasangan (A)

Menurut (Handayani, 2015), langkah pertama dalam menetapkan prioritas elemen-elemen dalam suatu persoalan keputusan adalah dengan membuat pembandingan berpasangan, yaitu elemen-elemen dibandingkan berpasangan terhadap suatu kriteria yang ditentukan.

Matriks perbandingan berpasangan adalah membandingkan dalam bentuk berpasangan seluruh kriteria yang ada. Kemudian perbandingan tersebut ditransformasikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan untuk analisis numerik.

Dalam *Analytic Hierarchy Process* (AHP), matriks adalah struktur data berbentuk tabel dua dimensi yang digunakan untuk menyajikan perbandingan berpasangan antar elemen (kriteria, subkriteria atau alternatif) berdasarkan tingkat kepentingan relatif.

Proses pembandingan ini dimulai dari puncak hierarki untuk memiliki kriteria C, atau sifat, yang akan digunakan untuk melakukan pembandingan yang pertama. Lalu dari tingkat tepat dibawahnya, ambil elemen-elemen yang akan dibandingkan : A_1, A_2, dan seterusnya. Selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2.2.1.

Tabel 2. 2. 1 Perbandingan Berpasangan

C	A_1	A_2	...	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}

A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	a_{n1}	a_{2n}	...	a_{nn}

Berdasarkan Tabel 2.2.1, matriks perbandingan berpasangan diperoleh dengan cara membandingkan elemen A_1 dalam kolom disebelah kiri dengan elemen A_1, A_2 dan seterusnya yang terdapat di baris atas berkenaan dengan sifat C disudut kiri atas. Lalu ulangi pada elemen kolom A_2 dan seterusnya, sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \forall i \text{ dan } n = 1,2,\dots,n\,, i = 1,2,\dots,n \qquad (2.2.1)$$

Keterangan:

A : Matriks perbandingan berpasangan.

n : Banyaknya baris atau kolom yang jumlahnya disesuaikan dengan jumlah kriteria.

a_{ij} : Elemen matriks A baris ke-i dan kolom j (kriteria ke i dan j).

$a_{11} \cdots a_{1n}$: Nilai Elemen perbandingan berdasarkan tabel saaty.

Kemudian skala preferensi yang digunakan yaitu skala 1 yang menunjukkan tingkat yang paling rendah (*equal importance*) sampai dengan skala 9 yang menunjukkan tingkatan paling tinggi (*extreme importance*). Nilai dan keterangan disajikan dalam Tabel 2.2.2.

Tabel 2. 2. 2 Skala Penilaian perbandingan berpasangan (Skala Saaty)

Intensitas Kepentingan	Keterangan
1	Kedua yang satu sedikit lebih penting dari elemen lainnya
3	Elemen yang satu sedikit lebih penting dari pada elemen yang lainnya
5	Elemen yang satu lebih penting dari elemen lainnya

7	Elemen yang satu sangat penting dari elemen lainnya
9	Elemen yang satu mutlak sangat penting dari elemen lainnya
2,4,6,8	Nilai – nilai antar dua nilai pertimbangan yang berdekatan

Sumber: Jasril (2011)

2.2.2 Matriks Normalisasi (M)

Normalisasi matriks adalah matriks hasil transformasi yang bertujuan untuk menyatukan skala nilai pada elemen-elemen matriks agar memiliki skala seragam. Proses ini dilakukan untuk menyederhanakan analisis atau perbandingan data.

Matriks normalisasi untuk setiap baris dan setiap kolom pada matriks perbandingan berpasangan didapatkan dengan cara membagi setiap elemen matriks A dengan jumlah total setiap kolom dari matriks A sesuai dengan Persamaan 2.2.1.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\sum_{i=1}^{n} a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\sum_{i=1}^{n} a_{in}} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

Keterangan :

M : Matriks Normalisasi.

a_{nn} : Elemen matriks M baris dan kolom ke-n.

$\sum_{i=1}^{n}$: Jumlah setiap kolom matriks M

n : Ukuran matriks.

2.2.3 Matriks Rata-Rata (W)

Nilai matriks normalisasi kemudian dicari nilai eigen vektor (W) didapatkan dengan penjumlahan setiap nilai pada baris matriks M dibagi dengan jumlah total semua nilai dari elemen matriks M sesuai dengan Persamaan 2.2.2.

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{1i}}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{ni}}{n} \end{bmatrix}, m \in M \ . \tag{2.2.3}$$

Keterangan :

W : Matriks rata-rata baris dari matriks normalisasi (bobot kriteria).

$\sum_{i=1}^{n} m_{1i}$: Jumlah setiap baris pada matriks M.

n : Jumlah elemen.

m : Nilai setiap elemen dari matriks M.

Sehingga hasil pembobotan kriteria (*weight*) adalah : w_j , $j = 1,2, \ldots , n$

2.2.4 Bobot Kriteria

Bobot kriteria pemilihan karyawan terbaik pada dasarnya menunjukkan urutan prioritas atau pengaruh kriteria dalam pemilihan karyawan terbaik. Semakin besar bobot suatu kriteria maka semakin tinggi prioritas atau semakin besar pengaruh kriteria tersebut dalam proses pemilihan karyawan terbaik. Begitu pun sebaliknya, semakin kecil bobot suatu kriteria maka semakin rendah tingkat prioritas atau semakin kecil pengaruh kriteria tersebut dalam proses pemilihan karyawan terbaik.

Pada Persamaan 2.2.3 mencari nilai konsistensi untuk setiap bobot kriteria dengan menghitung nilai λ_{maks} CI dan CR.

$$P = A \cdot W, \tag{2.2.4}$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & w_{11} & \cdots & a_{1n} & w_{n1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & w_{n1} & \cdots & a_{nn} & w_{n1} \end{bmatrix}, a \in A; w \in W$$

P : Matriks perkalian elemen A dengan W untuk mencari λ_{maks}.

a_{ij} : Elemen dari matriks A.

w_{ij} : Elemen dari matriks W.

n : Elemen ke- n.

2.3 Nilai Eigen Maksimum dan Vektor Eigen Utama

Nilai eigen dalam metode Analytic Hierarchy Process (AHP) penting untuk menentukan bobot prioritas dari suatu matriks perbandingan berpasangan. Dalam Analytic Hierarchy Process (AHP), setiap kriteria atau alternatif dibandingkan satu sama lain menggunakan skala saaty yang ada pada Tabel 2.2.2. Perbandingan tersebut menghasilkan sebuah matriks, hubungan antar elemen dapat dinyatakan secara matematis melalui konsep nilai eigen dan vektor eigen. Pada Analytic Hierarchy Process (AHP) vektor eigen utama (principal eigenvector) dari matriks perbandingan, yaitu vektor yang terkait dengan nilai eigen terbesar (*maximum eigen value,* $\lambda_{maksimum}$). Nilai eigen utama ini, setelah dinormalisasikan sehingga jumlah komponennya menjadi 1, akan menjadi bobot prioritas yang menunjukkan Tingkat kepentingan relative setiap kriteria atau alternatif.

Nilai eigen maksimum ($\lambda_{maksimum}$) sendiri memiliki fungsi ganda. Selain menjadi bagian dari proses perhitungan bobot, nilai ini digunakan untuk mengukur konsistensi penilaian melalui *Consistency Index* (CI) dan *Consistency Ratio* (CR). Nilai eigen maksimum ($\lambda_{maksimum}$) menjadi indicator apakah matriks perbandingan tersebut konsisten atau tidak. Kondisi konsistensi sempurna jika nilai $\lambda_{maksimum}$ sama dengan ukuran matriks (n), jika nilai $\lambda_{maksimum}$ besar dari ukuran matriks (n) maka penilaiannya tidak konsisten.

Berdasarkan hasil dari perhitungan, setiap elemen dari matriks *P* dihitung rata-ratanya dengan menggunakan Persamaan 2.2.6. Nilai rata-rata akhir tersebut adalah nilai λ_{maks}.

$$\lambda_{maks} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i1}}{w_{i1}}}{n}, p \in P \; dan \; w \in W \; . \qquad (2.3.1)$$

Keterangan :

λ_{maks} : Nilai Eigen maksimum.

p_{i1} : Elemen dari Matriks *P* untuk i=1,2, …. , , n.

w_{i1} : Elemen dari Matriks W untuk i=1,2, …. , n.

n : Banyaknya elemen yang ada.

Nilai konsistensi sangat perlu untuk diketahui dalam sebuah sistem pengambilan Keputusan. Langkah berikutnya adalah menghitung nilai *CI* dan nilai *CR* sebagai berikut :

$$CR = \frac{CI}{RI} \qquad (2.3.2)$$

Nilai CI didapatkan dengan cara sebagai berikut :

$$CI = \frac{(\lambda_{maks} - n)}{(n-1)} \qquad (2.3.3)$$

Keterangan :

CR : Rasio konsistensi.

CI : Indeks konsistensi.

RI : Indeks random konsistensi.

λ_{maks} : Nilai eigen maksimum..

n : Banyaknya elemen yang dibandingkan

Random Index (RI) bervariasi sesuai dengan ordo matriksnya, yang dapat dilihat pada Tabel 2.2.3 berikut :

Tabel 2. 3. 1 *Random Index*

Ukuran Matriks	*Konsistensi Acaka*
1	0,00
2	0,00
3	0,58
4	0,90
5	1,12
6	1,24
7	1,32
8	1,41
9	1,45
10	1,49

Sumber: Jasril (2011)

Nilai rasio konsistensi pada CI dan CR digunakan untuk konsistensi. Apabila nilai rasio konsistensi $< 0{,}1$ maka data penilaian perlu diperbaiki kembali, jika nilai rasio konsistensi $> 0{,}1$ maka data penilaian dapat dinyatakan benar.