

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Graf

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang berkembang dari permasalahan sederhana dalam kehidupan nyata. Sejarah teori graf bermula pada abad ke-18, ketika matematikawan Swiss **Leonhard Euler** memperkenalkan konsep graf melalui penyelesaian masalah *Seven Bridges of Königsberg* pada tahun 1736.

Dalam permasalahan tersebut, Euler mengkaji kemungkinan untuk melintasi ketujuh jembatan di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali tanpa mengulang lintasan. Permasalahan tersebut kemudian diselesaikan oleh Euler melalui pembuktian matematis dengan memodelkan situasi ke dalam bentuk graf, di mana daratan direpresentasikan sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan direpresentasikan sebagai sisi (*edge*). Dari pemodelan tersebut, Euler menunjukkan bahwa lintasan yang melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke titik awal tidak mungkin dilakukan apabila terdapat simpul dengan derajat ganjil (West, 2001).

2.1.1 Defenisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis menjadi $G = (V, E)$ dimana V merupakan himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul, ditulis menjadi $V = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ dengan n simpul, sedangkan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul, ditulis menjadi $E = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$ dengan m sisi.

Graf boleh tidak memiliki sisi satu buah pun, tetapi harus memiliki minimal satu buah simpul. Graf yang hanya memiliki satu buah simpul dan tidak memiliki sisi disebut graf trivial (West, 2001).

2.1.2 Jenis- Jenis Graf

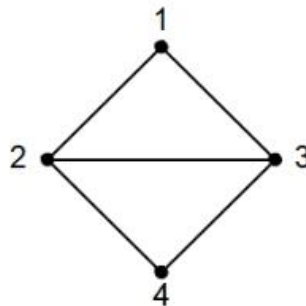
Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan ada atau tidak adanya sisi ganda, jumlah simpul, dan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada atau tidak adanya sisi ganda, maka graf terbagi 2 jenis, yaitu :

1. Graf Sederhana

Graf ada yang memiliki dan tidak memiliki gelang maupun sisi ganda. Sisi ganda yaitu terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua buah simpul. Jika tidak memiliki sisi ganda, maka graf tersebut merupakan graf sederhana.

Definisi 2.1.1. (Munir,2010) *Graf sederhana (simple graph) adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun gelang, sehingga setiap pasangan simpul dihubungkan oleh paling banyak satu sisi*



Gambar 2.1.1. Graf Sederhana

2. Graf Tak Sederhana

Graf ada yang memiliki dan tidak memiliki gelang maupun sisi ganda. Sisi ganda yaitu terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua buah simpul. Jika memiliki sisi ganda, maka graf tersebut merupakan graf tak sederhana.

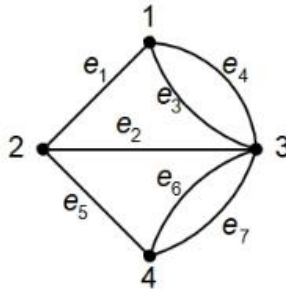
Definisi 2.1.2. (Munir,2010) *Graf tak sederhana (unsimple graph) adalah graf yang memiliki sisi ganda, yaitu lebih dari satu sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama.*

Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu :

a. Graf Ganda

Sisi ganda yang menghubungkan antar simpul bisa lebih dari dua. Jika terdapat graf yang memiliki sisi lebih dari satu dan menghubungkan dua buah simpul, maka graf tersebut adalah graf ganda.

Defenisi 2.1.3. (Munir,2010) *Graf ganda (multigraph) merupakan graf yang dapat memiliki sisi ganda (multiple edges) antara dua simpul.*

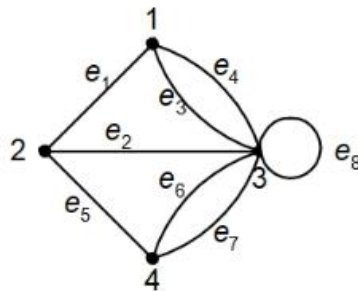


Gambar 2.1.2. Graf Ganda

b. Graf Semu

Graf ada yang mengandung gelang, gelang adalah sisi yang simpul ujungnya sama. Dimana gelang tersebut tetap terhubung ke graf.

Definisi 2.1.4. (Munir,2010) *Graf semu (pseudograph) adalah graf yang memiliki gelang (loop).*



Gambar 2.1.3 Graf Semu

Berdasarkan jumlah simpul, maka graf terbagi 2 jenis, yaitu :

1. Graf Berhingga

Graf terdiri dari simpul dan sisi, banyaknya simpul pada graf dapat dihitung dan tidak dapat dihitung. Jika suatu graf memiliki simpul dengan jumlah yang dapat dihitung, maka graf tersebut adalah graf yang memiliki batasan.

Definisi 2.1.5. (Munir,2010) *Graf berhingga (finite graph) adalah graf yang memiliki jumlah simpul yang berhingga, sehingga banyaknya simpul dalam graf tersebut dapat dihitung.*

2. Graf Tak Berhingga

Graf terdiri dari simpul dan sisi, banyaknya simpul pada graf dapat dihitung dan tidak dapat dihitung. Jika suatu graf memiliki simpul dengan jumlah

yang tidak dapat dihitung, maka graf tersebut adalah graf yang tidak memiliki batasan.

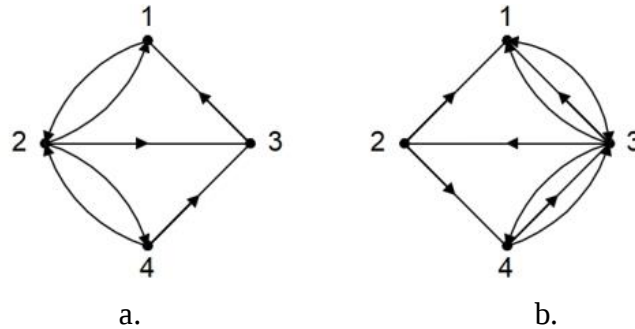
Definisi 2.1.6. (Munir,2010) *Graf tak berhingga (unlimited graph) adalah graf yang jumlah simpulnya tidak dapat dihitung atau tidak terbatas .*

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf terbagi 2 jenis, yaitu :

a. Graf Berarah

Graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah atau busur dikenal dengan graf berarah. Arah diberikan untuk mengetahui bahwa sisi tersebut bertujuan.

Definisi 2.1.7. (Munir,2010) *Graf berarah (directed graph / digraph) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Sisi yang berarah tersebut dinamakan busur (arc).*

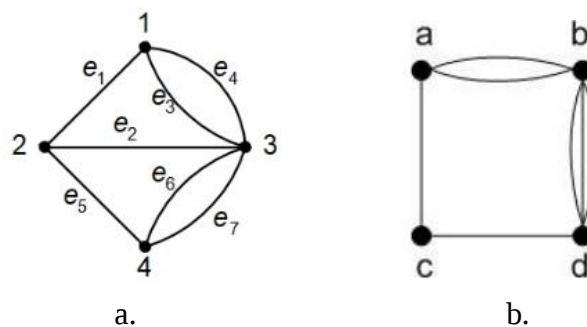


Gambar 2.1.4. a. Graf Berarah, b. Graf Ganda Berarah

b. Graf Tak Berarah

Graf yang setiap sisinya tidak mempunyai orientasi arah dikenal dengan graf tak berarah. Dengan tidak adanya arah yang diberikan , maka sisi tersebut tidak bertujuan.

Definisi 2.1.8. (Munir,2010). *Graf tak berarah (undirected graph) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.*



Gambar 2.1.5.a. Graf Tak Berarah , b. Graf Ganda Tak Berarah

2.1.3 Terminologi Graf

Terminologi disebut juga istilah, jadi terminologi graf adalah istilah graf. Berikut istilah/terminologi graf tersebut :

1. Bertetangga (Adjacent)

Pada suatu graf terdapat simpul dan sisi, jika sebuah simpul terkait langsung dengan simpul lainnya, maka simpul-simpul tersebut dihubungkan oleh sisi. Sehingga dapat dikatakan simpul-simpul tersebut bertetangga.

Definisi 2.1.9. (Munir,2010) *Jika dua buah simpul pada graf terhubung langsung dengan sebuah sisi disebut bertetangga. Misal, u bertetangga dengan v jika (u,v) adalah sebuah sisi pada graf G .*

2. Tidak Bertetangga

Pada suatu graf terdapat simpul dan sisi, jika sebuah simpul terkait tidak langsung dengan simpul lainnya, maka simpul-simpul tersebut tidak langsung terhubung dengan sebuah sisi. Sehingga dapat dikatakan simpul-simpul tersebut tidak bertetangga.

Definisi 2.1.10. (Munir,2010) *Jika dua buah simpul pada graf tidak terhubung langsung dengan sebuah sisi disebut tidak bertetangga. Misal u tidak bertetangga dengan v , jika (u,v) bukan sebuah sisi pada graf G .*

3. Bersisian (Incident)

Graf memiliki sisi yang menghubungkan antar simpul-simpul di suatu graf. Sisi-sisi yang berhubungan dengan simpul-simpul yang sama tersebut dikatakan bersisian.

Definisi 2.1.11. (Munir,2010) *Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan v .*

4. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)

Pada graf ada simpul yang terasingkan karena tidak memiliki tetangga dan tidak memiliki sisi yang terhubung. Sisi tersebut tidak menghubungkan antar dua simpul, sehingga simpul itu berdiri sendiri dan terasingkan.

Definisi 2.1.12. (Munir,2010) *Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian atau tidak mempunyai simpul yang bertetangga.*

5. Graf Kosong (*Null Graph* atau *Empty Graph*)

Graf pada umumnya memiliki sisi, sehingga memiliki himpunan untuk sisi-sisinya. Namun, ada juga graf yang tidak memiliki himpunan pada sisi-sisinya, sehingga graf tersebut dikatakan graf kosong.

Definisi 2.1.13. (Munir,2010) *Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Notasi N_n menyatakan n sebagai jumlah simpul.*

6. Derajat (Degree)

Pada graf terdapat simpul-simpul yang dihubungkan oleh sisi. Sehingga graf memiliki jumlah sisi yang terhubung atau bersisian yang dikenal dengan derajat dari simpul.

Definisi 2.1.14. (Munir,2010) *Derajat simpul graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Notasi $\deg(v)$ menyatakan derajat simpul v .*

7. Lintasan (Path)

Pada suatu graf terdapat simpul-simpul yang akan dihubungkan dengan rangkaian sisi. Dimana akan terdapat jalan yang berada pada semua simpulnya itu berbeda.

Definisi 2.1.15. (Munir,2010) *Lintasan adalah rangkaian sisi yang menghubungkan dari simpul awal hingga simpul akhir.*

8. Siklus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit)

Pada suatu graf terdapat sisi-sisi, dimana sisi-sisi tersebut yang menghubungkan setiap simpul akan membentuk sebuah lintasan. Untuk jumlah. dari sisi-sisi tersebut merupakan panjang suatu sirkuit.

Definisi 2.1.16. (Munir,2010) *Sirkuit atau siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.*

9. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul yang terhubung oleh sebuah garis, dimana garis tersebut adalah lintasannya. Jika terdapat lintasan dari u ke v , maka dua buah simpul u dan simpul v dikatakan terhubung.

Definisi 2.1.17. (Munir,2010) *Graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika setiap pasangan simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v .*

10. Tidak Terhubung (*Disconnected*)

Dua buah simpul yang terhubung oleh sebuah garis, dimana garis tersebut adalah lintasannya. Jika tidak terdapat lintasan dari u ke v , maka dua buah simpul u dan simpul v dikatakan tidak terhubung.

Definisi 2.1.18. (Munir,2010) *Graf tak berarah G disebut graf tak terhubung (disconnected graph) jika setiap pasangan simpul u dan v di dalam himpunan V tidak terdapat lintasan dari u ke v .*

2.1.4 Representasi Graf

Beberapa representasi yang mungkin untuk graf adalah :

1. Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

Matriks ketetanggaan merupakan representasi graf yang paling umum. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul $n \geq 1$. Matriks ketetanggaan G adalah matriks dwimarta berukuran $n \times n$. Matriks tersebut dinamakan $A = |a_{ij}|$ maka untuk $a_{ij} = 0$ adalah simpul i dan j tidak bertetangga dan untuk $a_{ij} = 1$ adalah simpul i dan j bertetangga. (Munir,2010).

2. Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)

Matriks bersisian merupakan matriks yang menyatakan kebersisian simpul dengan sisi. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul dan m buah sisi. Matriks bersisian G adalah matriks berukuran $n \times m$ baris menunjukkan label simpul, sedangkan kolom menunjukkan label sisi. Matriks tersebut dinamakan $A = |a_{ij}|$ maka untuk $a_{ij} = 1$ adalah simpul i bersesuaian dengan sisi j dan untuk $a_{ij} = 0$ adalah simpul i tidak bersesuaian dengan sisi j . (Munir,2010).

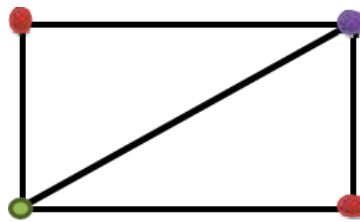
3. Senarai Ketetanggaan

merupakan representasi graf yang mencantumkan daftar simpul-simpul yang bertetangga dengan setiap simpul di dalam graf. Representasi ini lebih efisien digunakan untuk graf yang memiliki jumlah sisi relatif sedikit. (Munir,2010).

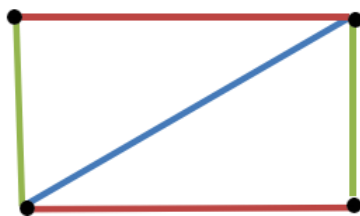
2.2 Pewarnaan Graf

Graf memiliki salah satu permasalahan penting yang dikenal sebagai **pewarnaan graf** (*graph colouring*). Secara umum, permasalahan pewarnaan graf terbagi menjadi tiga jenis, yaitu **pewarnaan simpul** (*vertex colouring*), **pewarnaan sisi** (*edge colouring*), dan **pewarnaan wilayah** (*region colouring*).

Pewarnaan simpul adalah pemberian warna pada setiap simpul dalam graf sedemikian sehingga **setiap dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda**. Pewarnaan sisi merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf sedemikian sehingga **setiap dua sisi yang saling bertetangga tidak memiliki warna yang sama**. Adapun pewarnaan wilayah adalah pemberian warna pada wilayah-wilayah yang terbentuk oleh graf planar sehingga **setiap dua wilayah yang bertetangga memiliki warna yang berbeda** (West, 2001).



Gambar 2.2.1 Pewarnaan Simpul



Gambar 2.2.2. Pewarnaan Sisi



Gambar 2.2.3. Pewarnaan Wilayah

Pada persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai dengan warna-warna yang berbeda, tetapi juga memperhatikan agar warna yang sama tidak saling berdekatan atau bertetangga dan menggunakan warna dengan jumlah yang sesedikit mungkin. Salah satu penerapan pewarnaan graf adalah mewarnai peta (*colouring of map*). (West, 2001).

2.3 Algoritma Welch-Powell

Berikut dijabarkan tentang algoritma *Welch- Powell* :

2.3.1 Definisi Algoritma Welch-Powell

Algoritma *Welch-Powell* merupakan algoritma pewarnaan graf, dimana untuk mewarnai sebuah graf G secara tepat dan sesuai. Algoritma ini tidak memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G , namun algoritma ini cukup sederhana dan mudah untuk digunakan.

Algoritma *Welch-Powell* melakukan pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya yang disebut dengan *Largest Degree Ordering (LDO)*, yaitu melakukan pewarnaan berdasarkan derajat besar ke derajat kecil dan menggunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama dan simpul berikutnya yang tidak bertetangga dengan simpul pertama dan seterusnya.

Tujuan dari algoritma *Welch-Powell* adalah bilangan kromatik, yaitu memperoleh jumlah warna minimum yang dapat diterapkan pada suatu graf G . sehingga simpul-simpul yang bertetangga pada graf G tidak memiliki warna yang sama. (West, 2001).

2.3.2. Langkah-Langkah Algoritma Welch-Powell

Dalam menyelesaikan masalah penjadwalan menggunakan algoritma *Welch- Powell* diperlukan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Urutkan simpul-simpul dari graf G dalam derajat yang menurun, yaitu mulai dari derajat tertinggi ke terendah.
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama dengan derajat tertinggi dan simpul-simpul selanjutnya sesuai urutan yang tidak bertetangga dengan simpul pertama .

3. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya sesuai urutan yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan simpul dengan menggunakan warna kedua.
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai. (West, 2001).

2.3.3. Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik graf G adalah jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai simpul graf G tersebut. Bilangan kromatik graf G dinotasikan dengan $X(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dinotasikan dengan $X(G) = k$. Penerapan bilangan kromatik dari suatu graf sangat beragam, antara lain adalah pada masalah pengaturan jadwal, pada masalah penempatan bahan kimia, dan pada masalah penempatan barang dari objek-objek yang berbeda.

Beberapa graf tertentu dapat langsung dinyatakan bilangan kromatiknya, yaitu sebagai berikut:

1. Graf kosong N_n memiliki $X(G) = 1$ karena semua simpul tidak terhubung maka hanya dibutuhkan satu warna.
2. Graf lengkap K_n memiliki $X(G) = n$ karena semua simpul terhubung, maka dibutuhkan n buah warna.
3. Graf bipartit $K_{m,n}$ memiliki $X(G) = 2$ karena satu warna untuk simpul-simpul di himpunan V_1 , dan satu warna lagi untuk simpul-simpul di himpunan V_2 .
4. Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $X(G) = 3$ dan jika n genap maka $X(G) = 2$
5. Sembarang pohon T memiliki $X(T) = 2$. (West, 2001).